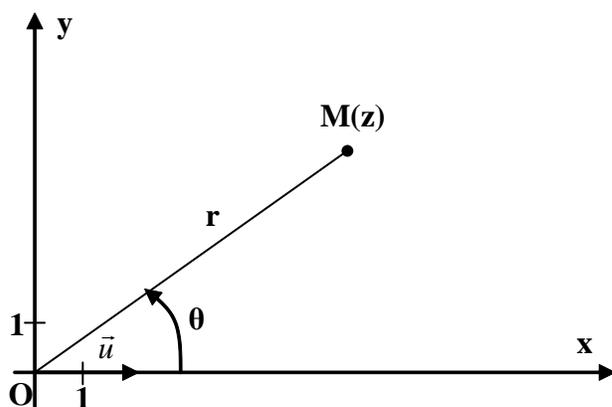


NOMBRES COMPLEXES

- Propriétés algébriques:

- $i^2 = -1$
- $z = a + ib$: **forme algébrique**, $\bar{z} = a - ib$: **conjugué**
- $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$, $z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$
- $\overline{\bar{z}} = z$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$, $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$
- z est **réel** si et seulement si $\bar{z} = z$
- z est **imaginaire pur** si et seulement si $\bar{z} = -z$

- Forme trigonométrique:



- $|z| = OM$
- $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \ [2\pi]$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $|z' - z| = MM'$
- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\theta = \theta' \ [2\pi]$
- z **réel** si et seulement si $\theta = 0 \ [\pi]$
- z **imaginaire pur** si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

- Forme exponentielle:

- $z = a + ib = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $e^{i0} = 1$, $e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta) = |z|e^{i\theta}$



- Quelques cas particuliers importants:

Nombre complexe	Module	Un argument	Une forme exponentielle
z	r	θ	$re^{i\theta}$
\bar{z}	r	$-\theta$	$re^{-i\theta}$
$-z$	r	$\theta + \pi$	$re^{i(\theta+\pi)}$
$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{r}$	$-\theta$	$\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
z^n	r^n	$n\theta$	$r^n e^{in\theta}$
zz'	rr'	$\theta + \theta'$	$rr' e^{i(\theta+\theta')}$
$\frac{z}{z'}$	$\frac{r}{r'}$	$\theta - \theta'$	$\frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$
$k > 0 \in \Re$	k	0	ke^{i0}
$k < 0 \in \Re$	$ k $	π	$ k e^{i\pi}$

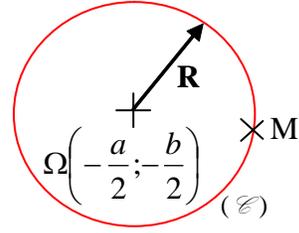
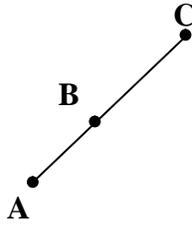
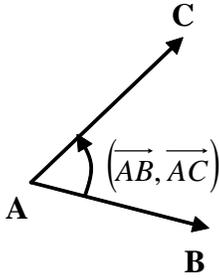
- Equation du second degré à coefficients réels: $az^2 + bz + c = 0$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les solutions sont les complexes conjugués :

$$z = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z' = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$



- Applications à la géométrie



$x^2 + ax + y^2 + by = 0$ est l'équation du cercle

$$\mathcal{C}(\Omega, R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}})$$

A, B, C alignés

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = k\pi$$

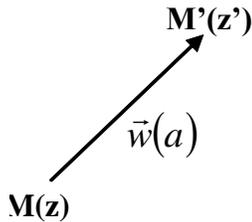
En effet : $x^2 + ax + y^2 + by = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = R^2$$

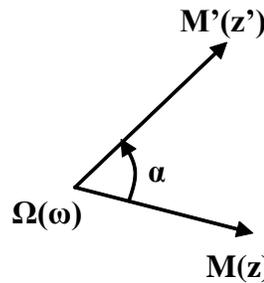
$$\Leftrightarrow |z_\Omega - z_M|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

- Transformations géométriques:



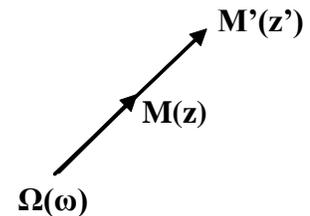
Translation de vecteur $\vec{w}(a)$:
 $z' = z + a$



Rotation (Ω, α):

$$z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha [2\pi] \end{cases}$$



Homothétie (Ω, k):

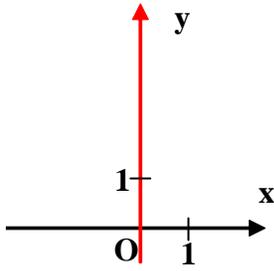
$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - z_\Omega| = k|z - z_\Omega| \\ \arg\left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) = k\pi \end{cases}$$



- Lieu de points:



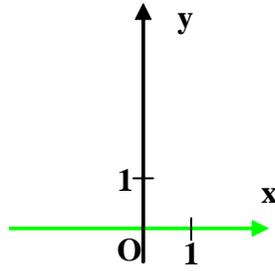
Z imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \arg Z = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow Z = |Z|e^{ik\frac{\pi}{2}}$$

Z est représenté par l'axe des ordonnées



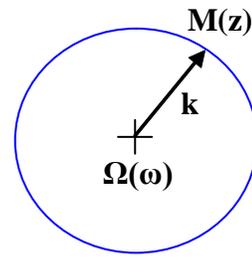
Z réel

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \arg Z = 0 [\pi]$$

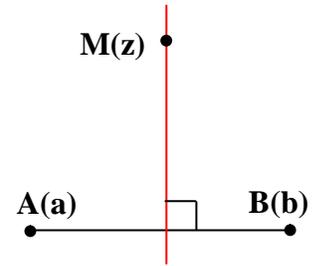
$$\Leftrightarrow Z = |Z|e^{ik\pi}$$

Z est représenté par l'axe des abscisses



$M(z) \in \mathcal{E}(\Omega(\omega), R = k)$

$$\Leftrightarrow |z - \omega| = k$$



$M(z) \in \text{médianne}$ de [AB]

$$\Leftrightarrow |z - a| = |z - b|$$

