LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

- Cas particulier des limites de suites:
  - si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ (L réel), u_n **converge**
  - si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, u_n **diverge**
  - si u_n n'admet pas de limite (ex : $u_n = \sin(n)$), u_n **diverge**

- 4 limites indéterminées : $"(+\infty)+(-\infty)"$, $"\dfrac{\infty}{\infty}"$, $"0\times\infty"$, $"\dfrac{0}{0}"$

- En +∞ ou -∞, un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$$

Exemples: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$

- En +∞ ou -∞, une fonction rationnelle a même limite que le rapport de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^p}$$

Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 10} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 8x = +\infty$

- Théorème des gendarmes:

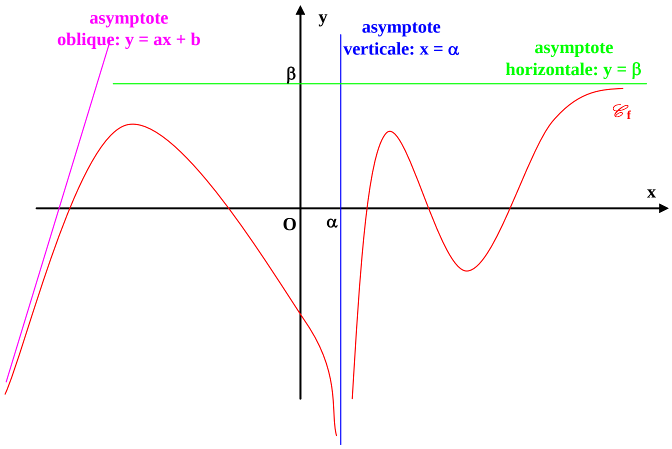
$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } f(x) < g(x) < h(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} h(x) = b$$

- Limites composées:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lambda \\ \text{et si } \lim\limits_{X\to\lambda} g(X) = l \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to\alpha} g\circ f(x) = l$$

lovemaths.eu

- Asymptotes :



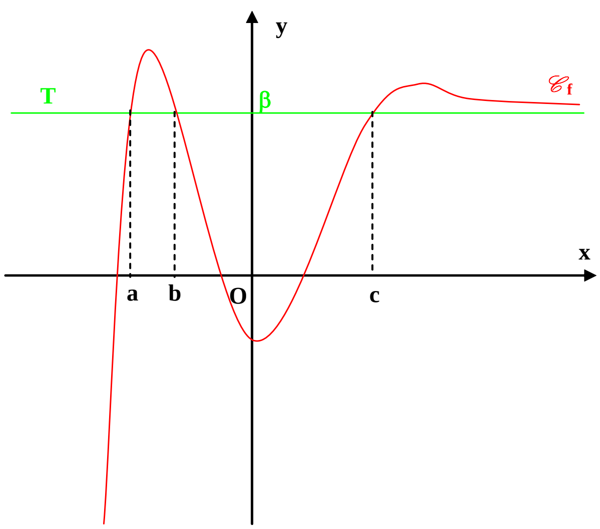
A retenir

Asymptote horizontale d'équation
y = β si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \beta$

Asymptote verticale d'équation
x = α si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \pm\infty$

Asymptote oblique d'équation
y = ax + b si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

- Position relative de l'asymptote T et de la courbe $\mathscr{C}_f$:



$\mathscr{C}_f$ au-dessus de **T** sur [a;b] ∪ [c;+∞[
$\mathscr{C}_f$ au-dessous de **T** sur]- ∞;a] ∪ [b;c]

A retenir

On calcule f(x) – y_T

On étudie son signe :

x	-∞		a		b		c		+∞
f(x)-y_T		-	0	+	0	-	0	+	

Si f(x) – y_T > 0, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de **T**
Si f(x) – y_T < 0, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de **T**